分数冪微分入門

Introduction to Fractional Derivatives

藤　井　一　幸
(横浜市立大学・国際総合科学部)

概要

このノートで分数冪微分 (fractional derivatives) の超入門を行う。

[I] はじめに

関数を 1 回微分する、2 回微分する、$\cdots$ と微積分の講義で習うが、では 1/2 回微分したいとき 又は しなければならないとき どうすればよいのか？ 比較的有名な分数冪微分の理論である。

残念ながら、学部の講義としてはほとんどの大学で行われていないと思う。それでこのノートで分数冪微分の即席入門を行う。3 分間我慢すれば食べられる ·· no！ ·· 理解できるよう工夫している。もっとよく知りたい人は浅田 [1] を読むこと。

[II] 問題設定

まず次の積分方程式を考える。

$$\int_0^\infty u(x-y^2)dy = f(x) \tag{1}$$

ここに $f(x)$ は与えられた既知関数で、$u(x)$ が求める関数である。$f(x)$ は計算に必要なすべての性質を備えている $\cdots$ good function と言う $\cdots$ と仮定する。

解説　この積分方程式は、solitary wave の回折 (diffraction) の研究で Lamb によって提出されたものである [2]。彼はこれを（後に有名になった） Bateman に相談して、以下の解 (8) を得た。従って [3] では、(1) を Lamb–Bateman integral equation と呼んでいる。

重要な点は、この解 $u(x)$ が**形式的に**

$$u(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} {\partial_x}^{1/2} f(x) \tag{2}$$

と書けることである [3]。まさに関数を 1/2 回微分することを意味する。記号の簡単化のため $\partial_x = \frac{d}{dx}$ とおいたが問題ないと思う。

(2) を証明しよう。Taylor 展開の公式

$$e^{a\partial_x} g(x) = g(x+a)$$

に注意して、(1) は

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-y^2\partial_x} u(x) dy = \left\{ \int_0^\infty e^{-y^2\partial_x} dy \right\} u(x) \tag{3}$$

となり、

$$\int_0^\infty e^{-y^2\partial_x} dy \tag{4}$$

を計算すればよい。そこで形式的に $a = \partial_x$ とおき

$$\int_0^\infty e^{-y^2 a} dy = \int_0^\infty e^{-ay^2} dy$$

を計算する。これは ガウシアン なので容易に積分できて

$$\int_0^\infty e^{-ay^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-\frac{1}{2}}$$

となり、再び ∂_x に戻して

$$\int_0^\infty e^{-y^2\partial_x}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}{\partial_x}^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

となる。(3) より

$$\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}{\partial_x}^{-\frac{1}{2}}\right\}u(x) = f(x) \tag{6}$$

で、移行して (2) 即ち、

$$u(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}{\partial_x}^{1/2}f(x)$$

を得る。

では、(2) をどのように計算するか？ このとき次の公式

$${\partial_x}^{-\mu}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{-\infty}^x g(\xi)(x-\xi)^{\mu-1}d\xi \quad (\mu > 0) \tag{7}$$

を用いる [4][1]。ここに $\Gamma(\mu)$ はガンマ関数で

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\mu-1}dx \qquad (\mu > 0)$$

と定義される。このとき

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

に注意すること。

[1] [4] では、これを μ 階の不定積分と呼んでいる

計算をすると

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_x{}^{1/2} f(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_x{}^{-1/2+1} f(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_x{}^{-1/2}\partial_x f(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_x{}^{-1/2} f'(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{x} f'(\xi)(x-\xi)^{-1/2} d\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{f'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \end{aligned}$$

となる。即ち、

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{f'(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \tag{8}$$

が我々の求める解である。

ノート　方程式 (1)

$$\int_0^\infty u(x-y^2)dy = f(x)$$

で、変数変換 $z = x - y^2$ ($\Longrightarrow y = \sqrt{x-z}$) を行うと

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\frac{u(z)}{\sqrt{x-z}} dz = f(x)$$

となる。これはアーベルによって提出された積分方程式と同じ形をしており、歴史上**最初**の積分方程式と言われている（by 浅田)。従って (1) は由緒正しい方程式でもある。

[III] 一般化

(1) の一般化を考えよう。もちろん一般化は一意的ではない。[3] では

$$\int_0^\infty u(x-y^m)dy = f(x) \quad (m \geq 2)$$

が提出されているが、あまり面白くない。そこで多重積分化

$$\int\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n} u(x-\sum_{j=1}^n {y_j}^2)dy_1 dy_2 \cdots dy_n = f(x) \tag{9}$$

を考える（提出する）。

これを [II] と同様の方法で解こう。そのために極座標に持ち込む ：

$$\mathbf{r} = (r, \theta_{n-2}, \cdots, \theta_2, \theta_1, \phi) \ \rightarrow \ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, y_n)$$

で

$$\begin{aligned}
y_n &= r\cos\theta_{n-2} \\
y_{n-1} &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3} \\
&\vdots \\
y_3 &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\
y_2 &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1\sin\phi \\
y_1 &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1\cos\phi \\
& (0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta_{n-2},\ \cdots,\ \theta_2,\ \theta_1 \leq \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi)
\end{aligned} \tag{10}$$

である[2]。

余計なこと 余計なこと（？）を一つ。２次元の極座標系は、x 軸から y 軸に向かって角度 ϕ を取るため

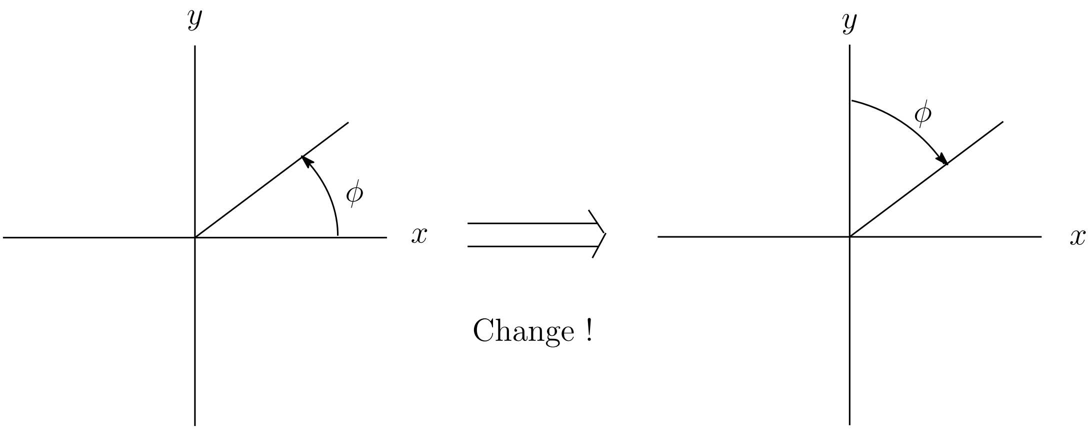
$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

[2] n 次元の極座標は popular でないかも知れない

となる。しかし、逆に y 軸から x 軸に向かって角度 ϕ を取れば

$$x = r\sin\phi, \quad y = r\cos\phi$$

と出来る（下図）。



従って $\mathbf{R}^n$ の極座標は

$$\begin{aligned}
y_n &= r\cos\theta_{n-2} \\
y_{n-1} &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3} \\
&\vdots \\
y_3 &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_2\cos\theta_1 \\
y_2 &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1\cos\phi \\
y_1 &= r\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_2\sin\theta_1\sin\phi
\end{aligned}$$

となる。こちらの方が better ではないか？（問題提起）

変数変換のヤコビアンは

$$\mathbf{J} = \det\left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{r}}\right) = \pm r^{n-1}\sin^{n-2}(\theta_{n-2})\sin^{n-3}(\theta_{n-3})\cdots\sin\theta_1 \qquad (11)$$

である（この証明は案外厄介で、省略する）。

変数変換の公式を用いると (9) は

$$\mathrm{Vol}(S^{n-1})\int_0^\infty r^{n-1}u(x-r^2)dr = f(x) \tag{12}$$

となる。ここに $\mathrm{Vol}(S^{n-1})$ は（半径 1 の）球面 S^{n-1} のボリュームで

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S^{n-1}) &= \int_0^\pi \sin^{n-2}(\theta_{n-2})d\theta_{n-2}\int_0^\pi \sin^{n-3}(\theta_{n-3})d\theta_{n-3}\cdots\int_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1\int_0^{2\pi} 1d\phi \\
&= B\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right)\cdots B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{2}{2},\frac{1}{2}\right)\times 2\pi \\
&= 2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= 2\pi\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}
\end{aligned}$$

で与えられる。この計算では、ベータ関数 $B(p,q)$ 及び ガンマ関数 $\Gamma(p)$

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$$

の性質

$$\int_0^\pi \sin^m\theta d\theta = B\left(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

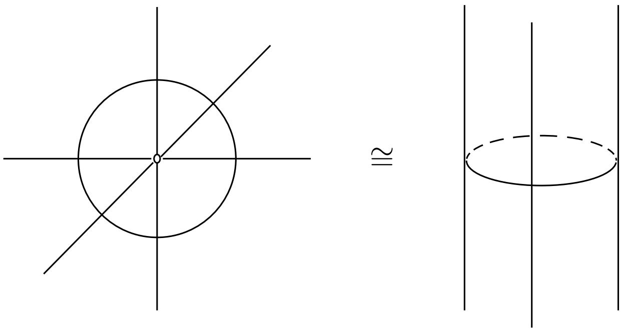
及び

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}; \quad \Gamma(1)=1,\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$$

を用いた [5]。

今は具体的な値は必要ないので、$C = \mathrm{Vol}(S^{n-1})$ と省略する。

ノート　この分解は同相 $\mathbf{R}^n - \{0\} \cong (0, \infty) \times S^{n-1}$ から来ている（下は $n = 2$）。



$$\mathbf{R}^2 - \{0\} \cong (0, \infty) \times S^1 \cong \mathbf{R} \times S^1$$

上方程式は

$$\int_0^\infty r^{n-1} u(x - r^2) dr = \frac{1}{C} f(x) \tag{13}$$

となる。左辺を再び Taylor 展開を用いて

$$左辺 = \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2 \partial_x} u(x) dr = \left\{ \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2 \partial_x} dr \right\} u(x)$$

と書き、 $a = \partial_x$ とおいて積分

$$\int_0^\infty r^{n-1} e^{-ar^2} dr$$

を計算する。$t = ar^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty r^{n-1} e^{-ar^2} dr &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{at}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2} - 1} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{n}{2} \right) a^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

なので、∂_x に戻して

$$\left\{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\partial_x{}^{-\frac{n}{2}}\right\}u(x)=\frac{1}{C}f(x)$$

となる。これより

$$u(x)=\frac{2}{C\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\partial_x{}^{\frac{n}{2}}f(x) \tag{14}$$

を得る。ここで C の値を使うと

$$C=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \implies \frac{2}{C\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\pi^{-\frac{n}{2}}$$

なので、(14) は非常にスッキリした form

$$u(x)=\pi^{-\frac{n}{2}}\partial_x{}^{\frac{n}{2}}f(x) \tag{15}$$

になる。最後に n を偶数と奇数に分けて考える。

(a) $n=2m$ のとき

$$u(x)=\pi^{-m}\partial_x{}^{m}f(x)=\pi^{-m}f^{(m)}(x) \tag{16}$$

となり、特に問題はない。

(b) $n=2m+1$ のとき

$$\begin{aligned}
u(x) &= \pi^{-(m+\frac{1}{2})}\partial_x{}^{m+\frac{1}{2}}f(x)\\
&= \pi^{-(m+\frac{1}{2})}\partial_x{}^{-\frac{1}{2}+m+1}f(x)\\
&= \pi^{-(m+\frac{1}{2})}\partial_x{}^{-\frac{1}{2}}\partial_x{}^{m+1}f(x)\\
&= \pi^{-(m+\frac{1}{2})}\partial_x{}^{-\frac{1}{2}}f^{(m+1)}(x)
\end{aligned}$$

なので、 (7) より ($\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \pi^{-\frac{1}{2}}$)

$$u(x) = \pi^{-(m+1)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \tag{17}$$

となる。

以上が求める解であるが、偶数と奇数では解の形が全く異なることが面白い。

さらに方程式 (9) の一般化を考えることが出来る[3]。$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^t$ とおくと 積分方程式

$$\int\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n} u(x - \mathbf{y}^t A\mathbf{y}) dy_1 dy_2 \cdots dy_n = f(x) \tag{18}$$

は (9) の自然な拡張である。ここに A は、正定値対称行列である。

この計算は読者に任せよう。

[IV] おわりに

このノートで分数冪微分の即席入門を行った。これからわかるように分数冪微分は、積分方程式を解くための強力な道具なのである。分数冪微分の（本格的な）入門は浅田 [1] を、一般理論は教科書 [4] を見よ。

参考文献

[1] 浅田明 : 関数を 1/2 回微分する–分数冪微分の話–, in 数理の玉手箱, 2010, 遊星社.

[3] 一般的に数学者は一般化が好きである

[2] H. Lamb : On the diffraction of a solitary wave, Proc. London Math. Soc. 8 (1910), 422.

[3] D. Babusci, G. Dattoli and D. Sacchetti : The Lamb–Bateman Integral Equation and the Fractional Derivatives, arXiv:1006.0184 [math-ph].

[4] K. Oldham and J. Spanier : The Fractional Calculus, 2006, Dover Publications.

[5] 笠原皓司 : 微分積分学, サイエンス・ライブラリ 数学=12, 2000, サイエンス社.